

Roll No. :

Total Pages : 8

1141/Arts

Ist Year Arts Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper - I
(Algebra)

Time : Three Hours
Maximum Marks : 70

PART-A [Marks : 20]
(खण्ड-अ)

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से
अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-B [Marks : 30]
(खण्ड-ब)

Answer five questions (250 words each). Select one question
from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।
प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-C [Marks : 20]
(खण्ड-स)

Answer any two questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से
अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-A

(खण्ड-अ)

1. Answer the following :

निम्न के उत्तर दीजिए :

UNIT-I

(इकाई-I)

- (i) Define Rank of a Matrix.

किसी मैट्रिक्स की जाति को परिभाषित कीजिये।

- (ii) Define Orthogonal Matrix.

लाम्बिक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिये।

UNIT-II

(इकाई-II)

- (iii) Change the signs of the roots of the following equation :

$$x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 9 = 0$$

निम्न समीकरण के मूलों के चिह्न बदलिए :

$$\underline{x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 9 = 0}$$

- (iv) Find the equation whose roots are reciprocals of the roots of the following equation :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$$

उस समीकरण को ज्ञात कीजिये जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों के व्युत्क्रम हैं :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0.$$

UNIT-III

(इकाई-III)

- (v) Define Even and Odd permutations.

सम और विषम क्रमचय को परिभाषित कीजिये।

- (vi) Define order of an element of a group.

किसी समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

UNIT-IV

(इकाई-IV)

- (vii) Define Index of a Subgroup.

उपसमूह के सूचकांक को परिभाषित कीजिये।

- (viii) Define Left and Right Cosets.

वाम और दक्षिण सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिये।

UNIT-V

(इकाई-V)

- (ix) Define Kernel of Homomorphism.

समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिये।

- (x) Define Automorphism of a Group.

समूह स्वाकारिता को परिभाषित कीजिये।

PART-B

(खण्ड-ब)

UNIT-I

(इकाई-I)

2. Show that :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. Show that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a Hermitian and a Skew Hermitian matrix.

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को एक हर्मिशियन तथा एक विषम हर्मिशियन मैट्रिक्स के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

UNIT-II

(इकाई-II)

4. The sum of two roots of the equation

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

is equal to zero. Find its roots.

समीकरण $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य है। इसके मूल ज्ञात कीजिए।

5. Solve the equation $x^3 - 18x - 35 = 0$ by Cardan's Method.

समीकरण $x^3 - 18x - 35 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

UNIT-III

(इकाई-III)

6. Show that $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ is an Abelian group for the operation ' t_5 ' defined as follows :

$$a t_5 b = \begin{cases} a+b & , \text{ if } a+b < 5 \\ a+b-5, & \text{if } a+b \geq 5 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ संक्रिया ' t_5 ' के लिए एक क्रमविनिमय समूह है, जहाँ ' t_5 ' निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a t_5 b = \begin{cases} a+b & , \text{ यदि } a+b < 5 \\ a+b-5, & \text{यदि } a+b \geq 5 \end{cases}$$

7. Prove that the union of two subgroups is a subgroup iff one is contained in the other.

दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि एक उपसमूह दूसरे में अन्तर्विष्ट हो। सिद्ध कीजिए।

UNIT-IV

(इकाई-IV)

8. State and Prove Lagrange's theorem for a finite group.

परिमित समूह के लिए लॉग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

9. Prove that if H is a subgroup of G and $N \Delta G$, then
 $H \cap N \Delta H$.

यदि H समूह G का कोई एक उपसमूह $N \Delta G$ हो, तो
 $H \cap N \Delta H$ सिद्ध कीजिए।

UNIT-V

(इकाई-V)

10. Show that if f is a homomorphism from a group G to G' and if e and e' be their respective identities, then

- (a) $f(e) = e'$
- (b) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

प्रदर्शित कीजिये यदि f समूह G से G' पर एक समाकारिता हो तथा e और e' क्रमशः : G और G' में तत्समक हों, तो

- (a) $f(e) = e'$
- (b) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G.$

11. A homomorphism defined from a group G on to G' is an isomorphism iff $\ker(f) = \{e\}$. Prove it.

सिद्ध कीजिये किसी समूह G से समूह G' पर परिभाषित आच्छादक समाकारिता f , तुल्यकारिता होती है $\Leftrightarrow \ker(f) = \{e\}$.

PART-C

(खण्ड-स)

UNIT-I

(इकाई-I)

12. Find the Eigen values and corresponding Eigen vectors of the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक मूलों एवं उनके संगत सदिशों को ज्ञात कीजिये :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

UNIT-II

(इकाई-II)

13. Solve the following equation by Ferrari's Method

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0.$$

निम्न समीकरण को फैरारी विधि से हल कीजिये :

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0.$$

UNIT-III

(इकाई-III)

14. If $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ and

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then Prove that

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

सिद्ध कीजिये

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

जहाँ $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ और

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

UNIT-IV

(इकाई-IV)

15. Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup iff : $H\Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H ; \forall x \in G$

सिद्ध कीजिये किसी समूह G का कोई उपसमूह H एक प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि :

$$H\Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H ; \forall x \in G$$

UNIT-V

(इकाई-V)

16. State and Prove Cayley theorem.

कैली प्रमेय को उल्लेख एवं सिद्ध कीजिये।